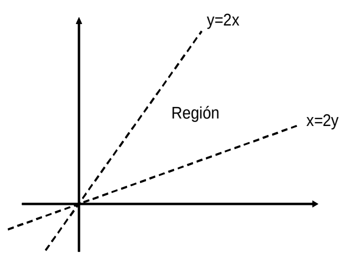
CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Primer examen parcial. 25 de Enero de 2010.

APELLIDOS...NÚMERO..........
NOMBRE...

Primera pregunta. Cada uno de los apartados se calificará de 0 a 2 puntos. Un error considerado **muy grave** en alguno de los apartados puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.
Responda breve y razonadamente

1. Describa gráficamente la región del plano complejo definida por $\frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\ z \leq\ \mathrm{Im}\ z \leq 2\ \mathrm{Re}\ z$



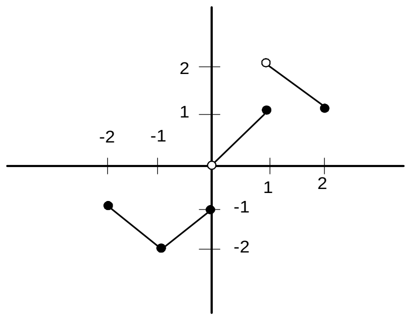
Si $z = x + iy$, la región viene definida por
$\frac{1}{2}x \leq y \leq 2x$

2. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ una función derivable. Dígase si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando en todos los casos.
   (a) La función $g(x) = |f(x)|$ es derivable en $[-1, 1]$.
   (b) f alcanza su valor máximo en $[-1, 1]$.
   (c) La derivada de la función $h(x) = f(x^2 - x + 1)$ se anula en un punto $c \in (0, 1)$.
   (d) $\int_{-1}^{1} f\,dx = 0$.

   (a) No. Basta considerar $f(x) = x$ que es derivable en $[-1, 1]$. Asi $g(x) = |x|$, que no es derivable en $x = 0$.
   (b) Si. Como f es derivable, es continua. Asi alcanza su máximo y mínimo absolutos en el intervalo cerrado y acotado $[-1, 1]$.
   (c) Si. *Primera forma:* $h'(x) = f'(x^2 - x + 1)(2x - 1)$, que se anula para $c = \frac{1}{2}$.
   Segunda forma: h está definida y es derivable en $[0, 1]$ y $h(0) = f(1) = h(1)$. Asi existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $h'(c) = 0$.
   (d) No. Basta considerar $f(x) = 1\ \forall x$.

3. Hallar los extremos absolutos, si existen, de la función $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| - 2 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$



La función f es derivable salvo en los puntos -1, 0, 1. Como la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 \le x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

la función tiene un mínimo absoluto en $x = -1$ y vale -2. Tiene supremo en $x = 1$, con valor 2, que no se alcanza. Por tanto no tiene máximo absoluto.

4. Demuéstrese la siguiente afirmación: si $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ es una función derivable tal que $f(0) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, entonces existe un punto $c \in (0, +\infty)$ tal que $f'(c) = 0$.

Si $f(x) = 0\ \forall x$, la función es constante y la afirmación es trivialmente cierta. En otro caso

- Si existe $a > 0$ tal que $f(a) = 0$, basta aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0, a]$.
- En otro caso, si $f(x) > 0\ \forall x > 0$, sea $a > 0$ y $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a) > 0$. Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, dado el anterior ε, existe $k > 0$ tal que si $x \ge k$, entonces $f(x) < \varepsilon$. Al ser f continua (por ser derivable), alcanza su máximo y mínimo absolutos en $[0, k]$. Como $f(a) > 0$, $f(0) = 0$ y $f(a) > \varepsilon$, el máximo absoluto se alcanza en un punto $c \in (0, k)$ y en él $f'(c) = 0$ (por ser interior al intervalo).
- Si $f(x) < 0\ \forall x > 0$, el proceso es el mismo salvo que $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)|$ y el punto c es dónde se alcanza el mínimo absoluto.

5. Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, $x \in \mathbf{R}$, calcúlese $(f^{-1})'(0)$.

Como $\dfrac{1}{(1+t^2)^2} > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente y, por tanto, invertible. Además $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ siendo $f(a) = b$. Como $f(1) = 0$ y $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, $f'(1) = \dfrac{1}{4}$. Asi $(f^{-1})'(0) = 4$.

CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Primer examen parcial. 25 de Enero de 2010.

APELLIDOS...NÚMERO...........
NOMBRE..

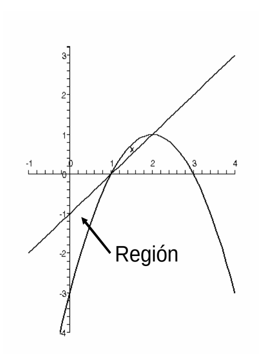
Segunda pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Sea f una función continua en $\mathbf{R}$ tal que $f(0) = 1$. Sea la función

$$F(x) = \int_0^{\frac{x^2-1}{2}} f(t)\, dt$$

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $x = 1$.
2. Hallar el área encerrada por la recta tangente obtenida en el apartado anterior, el eje OY y la gráfica de la función $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.

1. Como $F(1) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\, dt = 0$ y $F'(x) = f\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right) \cdot x \;\Rightarrow\; F'(1) = 1$, la ecuación de la recta tangente es $y = x - 1$.
2. El área pedida es



$$A = \int_0^1 (y_{\text{recta}} - y_{\text{parábola}})\, dx =$$
$$= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\, dx = \frac{5}{6}$$

También puede obtenerse como la diferencia entre el área comprendida entre la parábola, el eje OX y la parte negativa de OY y la del triángulo determinado por los ejes y la recta.

CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Primer examen parcial. 25 de Enero de 2010.

APELLIDOS...NÚMERO.........
NOMBRE...

Tercera pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$x^3 + ax + 2 = 0$$

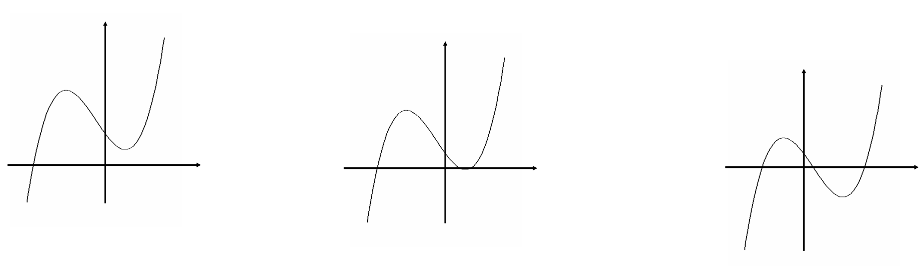
en función del parámetro $a \in \mathbf{R}$.

Se trata de un polinomio de grado 3, por lo que tendrá 1 ó 3 raíces reales. Sea $f(x) = x^3 + ax + 2$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2 + a$. Asi tenemos

- Si $a > 0$, la derivada siempre es positiva, f es estrictamente creciente y sólo tiene una raíz real.
- Si $a = 0$, la ecuación es $x^3 + 2 = 0$, que tiene como única raíz real $x = \sqrt[3]{-2}$.
- Caso $a < 0$. En este caso $f(x) = x^3 - |a|x + 2$ y $f'(x) = 3x^3 - |a|$. La derivada tiene entonces dos raíces que son $\pm\sqrt{\dfrac{|a|}{3}}$, que corresponden a puntos con tangente horizontal. Además

$$f\left(-\sqrt{\frac{|a|}{3}}\right) = -\frac{|a|}{3}\sqrt{\frac{|a|}{3}} + |a|\sqrt{\frac{|a|}{3}} + 2 = 2 + 2\frac{|a|}{3}\sqrt{\frac{|a|}{3}} > 0$$

Debemos ahora distinguir entre las tres posibilidades siguientes



Estos casos dependen del signo de $f\left(\sqrt{\dfrac{|a|}{3}}\right) = 2 - 2\dfrac{|a|}{3}\sqrt{\dfrac{|a|}{3}}$. Esta expresión se anula para $|a| = 3$ y como $a < 0$, tenemos:

1. Si $-3 < a < 0$, $|a| < 3$ y $f\left(\sqrt{\dfrac{|a|}{3}}\right) > 0$. Una única raíz real.
2. Si $a = -3$, $|a| = 3$ y $f\left(\sqrt{\dfrac{|a|}{3}}\right) = 0$. Tres raíces reales, una de ellas doble.
3. Si $a < -3$, $|a| > 3$ y $f\left(\sqrt{\dfrac{|a|}{3}}\right) < 0$. Tres raíces reales distintas.

Por tanto, si $a > -3$, sólo una raíz real y si $a \leq -3$, tres raíces reales.

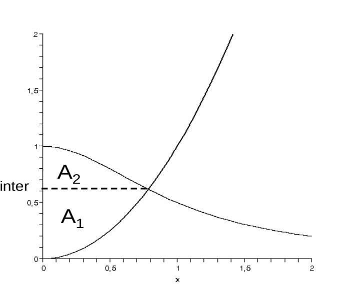
CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso.Primer examen parcial. 25 de Enero de 2010.

APELLIDOS..NÚMERO..........
NOMBRE...

Cuarta pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Hallar el volumen engendrado por la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ contenida en el primer cuadrante, al girar alrededor del eje OY.



La intersección de las curvas es $y_{\text{inter}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ que corresponde a $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Primera forma: Volumen por secciones

- Volumen engendrado por A_1: Las secciones ortogonales al eje OY son círculos con radio $x = \sqrt{y}$. Su área es πy y el volumen buscado es

$$V_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \pi y \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\pi}{4}(3 - \sqrt{5})$$

- Volumen engendrado por A_2: Las secciones ortogonales al eje OY son círculos con radio $x = \sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}$. Su área es $\pi x^2 = \pi \left(\dfrac{1}{y} - 1 \right)$ y el volumen buscado es

$$V_2 = \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} \pi \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = \pi \left[\ln|y| - y \right]_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} = \pi \left[\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} - \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$$

lo que da un volumen total de $\pi \left[\dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{3}{4} - \ln \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$

Segunda forma: Fórmula de giro con eje OY

Se obtiene el volumen como diferencia entre el engendrado por el área bajo $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y el obtenido al girar el área bajo $y = x^2$.

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} x \frac{1}{1+x^2} \, dx - 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} x \cdot x^2 \, dx$$

que conduce, evidentemente a la misma solución, pero con un aspecto algo diferente.